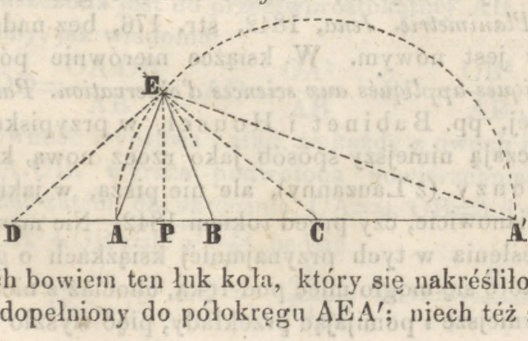
O NAJPROSTSZYM SPOSOBIE WYNAJDOWANIA ŚREDNIÉJ GEOMETRYCZNIE PROPORCYONALNÉJ MIĘDZY DWIEMA LINIAMI DANEMI, WYZNACZANIU PEWNYCH PUNKTÓW ELLIPSY, TUDZIEŻ O WZORACH NA POWIÉRZCHNIĄ PASA KULISTEGO I NA OBJĘTOŚĆ NIEKTÓRYCH BRYŁ OBROTOWYCH.

1.

Najprostszy sposób wynajdowania średniéj geometrycznie proporcyonalnéj między dwiema liniami danemi, w którym nie potrzeba ani dzielić linii na dwie części równe (dla znalezienia środka półokręgu), ani téż wyprowadzać prostopadłéj, zależy na użyciu trójkąta równoramiennego, jak następuje:

Na linii prostéj nieograniczonéj odcinam część AB (*fig. 1*) równą danéj linii mniejszéj. tudzież, w strony przeciwne sobie, części AC i BD, każdą równą danéj linii większéj; z punktów C i D, jako ze środków, promieniem CA=DB, kreślę dwa łuki koła, przecinające się z sobą w punkcie E; linia EA lub EB, będzie średnią żądaną.

Fig. 1.



Niech bowiem ten łuk koła, który się nakreśliło ze środka C, będzie dopełniony do półokręgu AEA'; niech też z punktu E

będzie do DC spuszczona prostopadła EP, i złączmy EA′. Ponieważ punkt E jest, z wykreślenia, równo oddalony od punktów D i C, prostopadła przeto EP dzieli linią DC na dwie części równe; a że BD=AC z wykreślenia, a tém samém i AD=BC, prostopadła zatém EP dzieli oraz i linią AB na dwie równe części. Linia więc EA, bok trójkąta prostokątnego AEA′, jako średnia proporcyonalna między AA′ i AP, jest średnią proporcyonalną między 2AC i ½AB, a tém samém i między AC i AB; linie zaś EB i EA, jako pochyłe równo oddalone od spodka prostopadłéj EP, są równe.

Aby to samo udowodnić bez kréślenia półokręgu i spuszczania prostopadłéj, poprowadźmy linie EC i ED. W trójkącie EDC, z wykréślenia równoramiennym, kąty D i C przy podstawie DC, są równe; a że nadto dwa boki trójkąta EDB obejmujące sobą kąt D, są, z wykreślenia, równe dwom bokom trójkąta ECA obejmującym sobą kąt C; trzecie przeto boki EB i EA tych dwóch trójkątów są także równe. Trójkąty zaś EAB i CAE, jako równoramienne i mające kąt A przy podstawach AB, AE, wspólny, a zatém względem siebie równokątne, dają proporcyą AB:EA=EA:AC.

Uważmy, że niniejsze wykréślenie, jeżeli je będziemy mogli i zechcemy zacząć od przedlużania danéj linii mniejszéj, odbędzie się całe za pomocą jednéj tylko rozwartości cyrkla, daną linią większą obejmującéj.

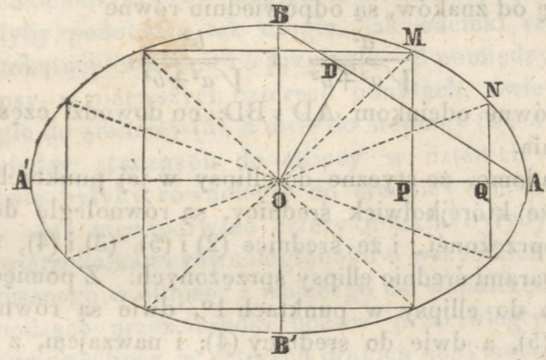
Kto piérwszy nauczył wynajdowania średniéj geometrycznéj wyłożonym tu sposobem, nie jest mi wiadomo. Nié ma tego sposobu Paucker w swych *Fundamente der Geometrie. Mitau*, 1842, chociaż tamże (*Erster bis vierter Cursus*, str. 96—98) podaje siedm innych sposobów. Znajduje się zaś ten sposób, z nieznaczną tylko odmianą, a z dowodzeniem na piérwsze poprzedzające wychodzącém, w dziele Kunze'go: *Lehrbuch der Geometrie. Planimetrie. Jena*, 1842, str. 176, bez nadmienienia jednak, czy jest nowym. W książce nierównie późniejszéj: *Calculs pratiques appliqués aux sciences d'observation. Paris*, 1857, autorowie jéj, pp. Babinet i Housel, w przypisku na str. 127, przytaczają niniejszy sposób jako rzecz nową, którą miał podać p. Gouzy (z Lauzanny), ale nie piszą, w jakiém dziele i kiedy, a mianowicie, czy przed rokiem 1842. Nie masz rzeczonego wykréślenia w tych przynajmniéj książkach o geometryi polskich, które się mogło miéć pod ręką, chociaż z nich, biorąc tylko obszerniejsze i pomijając przekłady, pięć wyszło w latach

1844, 1848, 1853, 1854 i 1858. Mniemało się więc, że pożyteczna być może powtórzyć tu rzecz, małéj tylko liczbie osób w latach 1843—1848 wykładaną, i dołączyć dowodzenie drugie, aby nauczyciel mógł wybrać, które zdawać mu się będzie dla uczniów łatwiejszém.

2.

Jeżeli ze środka O (fig. 2) *ellipsy, do cięciwy łączącéj którykolwiek koniec* A *osi wielkiéj z którymkolwiek końcem* B *osi małéj, spuścimy prostopadłą* OD, *która zatém ową cięciwę* AB *podzieli na dwa odcinki* AD i BD: 1°, *każdy z cztérech punktów, któregoby odległości od obu osi były (odrywając uwagę od znaków) równe téj prostopadłéj* OD (jak punkt M, dla którego OP i PM są =OD), *będzie się znajdował na ellipsie*; 2°, *każdy z cztérech punktów, któregoby odległość od osi małéj była równa odcinkowi większemu* AD, *a odległość od osi wielkiéj równa odcinkowi mniejszemu* BD (jak punkt N, dla którego OQ=AD, a QN=BD), *będzie także punktem należącym do ellipsy.*

Fig. 2.



W trójkącie bowiem OAB, w którym z wierzchołka O kąta prostego spuszczona jest do przeciwprostokątnéj AB, prostopadła OD, mamy, jak wiadomo:

$$OD=\frac{OA.OB}{AB},\quad AD=\frac{OA^2}{AB},\quad BD=\frac{OB^2}{AB}$$

(piérwsza równość wypływa i ztąd, że każdy z dwóch iloczynów AB.OD. OA.OB, wyraża podwojoną powiérzchnią trójkąta OAB). Kładąc zatém, dla skrócenia, $OA=a$, $OB=b$, i uważając, że $AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{a^2+b^2}$, będzie

$$OD=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad AD=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad BD=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Ellipsa, gdy jednę jéj oś, tu wielką, weźmiemy za oś odciętych x, a oś małą za oś rzędnych y, ma, jak wiadomo, za równanie

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2. \quad (1)$$

Zakładając, w tém równaniu,

$$y=x \quad (2), \quad \text{lub} \quad y=-x \quad (3),$$

widzimy, że każdego z tych punktów, w których ellipsę przecinają linie dzielące kąty między jéj osiami zawarte na dwie równe części, odcięta, a tém samém i rzędna, jest, co do jéj bezwzględnéj wartości, równa

$$\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

a zatém równa prostopadłéj OD: co dowodzi części pierwszéj twierdzenia.

Szukając zaś punktów, w których ellipsę przecinają średnice mające za równania

$$y=\frac{b^2}{a^2}x \quad (4), \quad y=-\frac{b^2}{a^2}x \quad (5),$$

widzimy, że odcięta i rzędna każdego z tych punktów, odrywając uwagę od znaków, są odpowiednio równe

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ i } \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

a zatém równe odcinkom AD i BD: co dowodzi części drugiéj twierdzenia.

Wiadomo, że styczne do ellipsy w jéj punktach leżących na jednéjże któréjkolwiek średnicy, są równoległe do średnicy z tamtą sprzężonéj, i że średnice (2) i (5), (3) i (4), są właśnie dwiema parami średnic ellipsy sprzężonych. Z pomiędzy zatém stycznych do ellipsy w punktach 1°, dwie są równoległe do średnicy (5), a dwie do średnicy (4); i nawzajem, z pomiędzy stycznych do ellipsy w punktach 2°, dwie są równoległe do średnicy (3), a dwie do średnicy (2). Jak więc punkta 1° są oczywiście wierzchołkami kwadratu wpisanego w ellipsę, tak znowu punkta 2° są temi punktami ellipsy, w których się jéj dotykają boki kwadratu na niéj opisanego.

Aby się zresztą o niniejszéj własności punktów 2° jeszcze inaczéj przekonać, uważmy, że styczna ellipsy w punkcie téj linii krzywéj mającym na współrzędne x' i y', przecina się z osią odciętych w punkcie mającym za odciętą $\frac{a^2}{x'}$, a z osią rzędnych, w punkcie mającym za rzędną $\frac{b^2}{y'}$; a że ta odcięta i ta

rzędna, w założeniu

$$x'=\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ i } y'=\pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

przechodzą obie na $\pm\sqrt{a^2+b^2}$; styczne więc do ellipsy w punktach 2°, tworzą czworokąt mający za swoje wiérzchołki te punkta, w których się okrąg koła współśrodkowy z ellipsą, a mający za promień cięciwę AB, przecina z osiami ellipsy przedłużonemi: co nietylko dowodzi, że niniejszy czworokąt jest kwadratem, ale nam jeszcze przypomina, jak się na ellipsie, któréjby obie osi były, co do ich długości, dane, opisuje kwadrat.

Łatwo tu postrzedz, że gdyby równanie (1) wyrażało, ogólniéj, ellipsę odniesioną do jéj środka i do jéj średnic sprzężonych; współrzędne punktów przecięcia się téj ellipsy z średnicami (2) i (3), byłyby téż, co do swych długości, równe prostopadłéj spuszczonéj z wiérzchołka kąta prostego na przeciwprostokątną w takim trójkącie prostokątnym, któryby za boki obejmujące kąt prosty, miał połowy a i b owych średnic sprzężonych: odcięta zaś i rzędna każdego z punktów przecięcia się téj ellipsy ze średnicami (4) i (5) (względem średnic (3) i (2) sprzężonemi), byłyby podobnież tak długie, jak odcinki rzeczonéj przeciwprostokątnéj, bokom a i b przylegle. Z pomiędzy stycznych do ellipsy w piérwszych cztérech punktach, dwie byłyby téż równolegle do średnicy (5), a dwie do średnicy (4); i nawzajem, z pomiędzy stycznych do ellipsy w cztérech drugich punktach, dwie byłyby równolegle do średnicy (3), a dwie do średnicy (2). Jak więc piérwsze cztéry punkta byłyby wtedy oczywiście wiérzchołkami równoległoboku o wszystkich bokach równych wpisanego w ellipsę, a mającego osi współrzędnych za linie przechodzące przez środki boków przeciwległych; tak znowu styczne do ellipsy w cztérech drugich punktach, tworzyłyby prostokąt opisany na ellipsie, mający przekątne na osiach współrzędnych, czyli czworokąt o wiérzchołkach przypadających na przecięciu się osi współrzędnych z okręgiem koła współśrodkowym z ellipsą, a mającym za promień rzeczoną przeciwprostokątną (która, jak wiadomo, jest równa linii łączącéj koniec osi wielkiéj z końcem osi małéj w téjże saméj ellipsie). A gdyby, w założeniu $a=b$, równanie (1) wyrażało ellipsę odniesioną do jéj środka i do jéj średnic sprzężonych równych; natenczas cztéry piérwsze i cztéry drugie punkta byłyby jednemi i temi samemi cztérema punktami, i to końcami obu jéj osi, czyli jéj wiérzchołkami.

W *Kompendium der ebenen und sfärischen Trigonometrie. Wien*, 1856, autor, p. Ernest Sedlaczek, dowodzi (str. 109—113) piérwszéj części twierdzenia podanego na początku niniejszego artykułu, przerabiając powyższe równanie ellipsy, odniesionéj do jéj środka i do obu jéj osi, na układ równań

$$x^2=\frac{b^2\text{dos}^2\vartheta}{1-e^2\text{dos}^2\vartheta},\quad y^2=\frac{b^2\text{wst}^2\vartheta}{1-e^2\text{dos}^2\vartheta}$$

(gzie e^2 oznacza stosunek różnicy a^2-b^2 do a^2), dających współrzędne punktu rzeczonéj krzywéj, do którego wyprowadzona ze środka linia prosta czyni z osią odciętych kąt ϑ. Dla okazania zaś, że w tym samym układzie współrzędnych, odcięta i rzędna takiego punktu ellipsy, w którym styczna téj krzywéj jest do obu jéj osi równo nachylona, są, co do swych długości, równe odcinkom AD i BD, używa równań

$$x^2=\frac{a^4\text{wst}^2\varphi}{a^2\text{wst}^2\varphi+b^2\text{dos}^2\varphi},\quad y^2=\frac{b^4\text{dos}^2\varphi}{a^2\text{wst}^2\varphi+b^2\text{dos}^2\varphi},$$

dających współrzędne punktu rzeczonéj krzywéj, w którym jéj styczna czyni z osią odciętych kąt φ. Przeglądając owo *Kompendium* przy końcu r. 1856, zanotowało się łatwą do uczynienia uwagę: że autor mógł był tych własności dowieść innym sposobem, prowadzącym oraz do twierdzenia ogólniejszego, którego nie podaje.

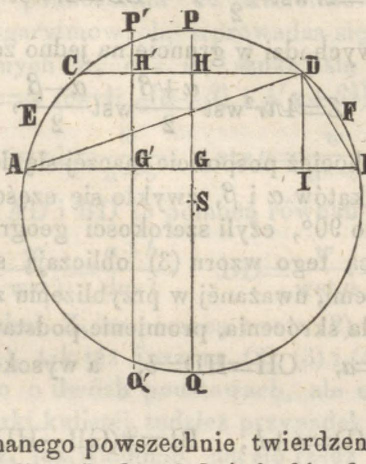
Chcąc nakréślić przez przybliżenie ellipsę, któréj obie osi są, co do ich długości, dane: możnaby, wyznaczywszy jéj wiérzchołki, wyznaczyć jeszcze, według twierdzenia podanego na początku niniejszego artykułu, jéj punkta 1° i 2°; a mając, tym sposobem, dwanaście punktów żądanéj ellipsy ściśle wyznaczonych, dokończyć jéj rysunku za pomocą liniału do kréślenia linij krzywych, lub téż od ręki. A chociaż nie każdy zgodzi się z autorem na to, żeby niniejszy sposób kréślenia ellipsy (którego się on, jak pisze, nauczył od swojego niegdyś nauczyciela, ś. p. Leopolda Karola Schulz von Strasznicki) należało przekładać nad inne sposoby dobrze wiadome; zawsze przecież przyda się wiedziéć i o wyłożonym dopiéro sposobie mniéj znanym, komu często przychodzi kréślić ellipsę.

3.

Niech AB i CD *(fig. 3)* będą dwie cięciwy koła, do jego średnicy PQ w punktach G i H prostopadłe; któreto zresztą punkta G i H mogą przypadać nietylko po jednéjże któréjkol-

wiek stronie środka S rzeczonego koła, ale i ze stron przeciwnych, lub téż jeden z nich może być samymże środkiem S. Gdy pólokrąg PAQ lub PBQ, zrobiwszy obrot całkowity około osi PQ, zakréśli powiérzchnią kuli; natenczas łuk AEC lub BFD zakréśli część téjże powiérzchni, zwaną pasem kulistym. Równoleżniki nakréślone w tym obrocie przez punkta A i C lub przez punkta B i D, nazywają się podstawami rzeczonego pasa; a wysokością onego jest odległość płaszczyzn tych dwóch równoleżników od siebie, jak np. HG, lub téż prostopadła DI spuszczona z punktu D do AB. Jeżeli w szczególności punkt H, a z nim i punkta C, D, padają na punkt P; wtedy pas kulisty, część powiérzchni kuli utworzona obrotem całkowitym łuku PEA lub PFB około osi PQ, ma tylko jednę podstawę, i zowie się czaszką kulistą.

Fig. 3.



Według znanego powszechnie twierdzenia geometryi elementarnéj, pas kulisty (bądź o jednéj, bądź o dwóch podstawach) ma za miarę iloczyn z okręgu koła wielkiego przez wysokość. Gdy zatém pole pasa kulistego utworzonego przez obrot łuku AEC lub BFD około PQ, nazwiemy Z; będzie

$$Z = \pi . \mathrm{PQ} . \mathrm{DI}, \tag{1}$$

gdzie π oznacza stosunek okręgu koła do średnicy. Jestto wzór do znalezienia pola Z najprostszy, gdy znamy średnicę kuli i gdy można łatwo wymierzyć wysokość pasa.

Poprowadźmy cięciwy AD i BD. Wiadomo, że jakimbykolwiek był trójkąt ABD, zawsze prostokąt z dwóch jego boków AD i BD jest równoważny prostokątowi ze średnicy PQ

koła opisanego i z prostopadłéj DI spuszczonéj na bok trzeci AB. Zamiast więc wzoru (1) można napisać

$$Z = \pi . AD . BD, \qquad (2)$$

gdzie AD i BD znaczą, nie łuki, lecz cięciwy. Przyczém można uważać, że dla równości łuków AEC i BFD, cięciwa AD jest równa cięciwie dzielącéj oba te łuki na dwie równe części, i że w przypadku równości podstaw pasa, wzór (2) nie różni się od wzoru (1).

Niech r oznacza promień kuli, czyli połowę średnicy PQ; a przyjmując łuk APB większym od łuku CPD, oznaczmy kąty przy S mające te łuki za miary, odpowiednio przez 2α i 2β. Ponieważ z kątów przy S, mający za miarę łuk APD, jest równy $\alpha + \beta$, mający zaś za miarę łuk BFD, jest równy $\alpha - \beta$, a tém samém cięciwy

$$AD = 2r \text{wst} \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad BD = 2r \text{wst} \frac{\alpha-\beta}{2};$$

wzór przeto (2) wychodzi w gruncie na jedno ze wzorem

$$Z = 4\pi r^2 \text{wst} \frac{\alpha+\beta}{2} \text{wst} \frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad (3)$$

dobrze znanym, chociaż pospolicie inaczéj się dowodzącym, i do którego, zamiast kątów α i β, zwykło się częściéj wprowadzać ich dopełnienia do 90°, czyli szerokości geograficzne podstaw pasa. Za pomocą tego wzoru (3) obliczają się powiérzchnie różnych pasów ziemi, uważanéj w przybliżeniu za kulę.

Połóżmy, dla skrócenia, promienie podstaw pasa

$AG = GB = a$, $\quad CH = HD = b$, $\quad$ a wysokość $DI = w$.

Ponieważ

$$AI = AG + HD = a + b, \quad BI = \pm(GB - HD) = \pm(a - b),$$

biorąc przed nawiasem znak +, gdy $a > b$, a —, gdy $a < b$; trójkąty przeto AID i BID, jako prostokątne przy I, dają

$$AD^2 = (a+b)^2 + w^2, \quad BD^2 = (a-b)^2 + w^2;$$

a na mocy tych wartości, równanie (2) przechodzi na

$$Z = \pi \sqrt{\{(a+b)^2 + w^2\}\{(a-b)^2 + w^2\}}. \qquad (4)$$

Wzór dopiéro napisany odpowiada, jak widzimy, jednemu ze znanych wyrażeń na objętość O odcinka kuli, mającego uważany tu pas kulisty za swoję powiérzchnią boczną (czyli na objętość bryły utworzonéj przez obrot całkowity figury HGAEC lub HGBFD około osi HG), mianowicie wyrażeniu

$$O = \tfrac{1}{2}\pi w (a^2 + b^2 + \tfrac{1}{3} w^2); \qquad (5)$$

i służy do znalezienia Z, gdy się nie zna średnicy kuli, a może łatwo zmierzyć a, b i w.

Gdyby np. naczynie, w kształcie odcinka kuli o podstawach równoległych wydrążone, miało 25,3 cali średnicy górnego otworu, 17,5 cali średnicy dna, a 10 cali głębokości; wzór (4), zakładając w nim $a=12,65$, $b=8,75$, a $w=10$, pokazałby nam, że sama boczna powierzchnia wewnętrzna tego naczynia wynosi 796,52 cali kwadratowych; do czego doliczając powierzchnią dna, mielibyśmy 1037,05 cali kwadratowych całéj powierzchni wewnętrznéj. Według zaś wzoru (5), naczynie to obejmowałoby w sobie 4239,87 cali sześciennych, a zatém 5,65 wiader (licząc 750,57 cali sześciennych na wiadro), lub téż 58,61 kwart (litrów), stosownie do tego, jakby cale były rossyjskiéj lub też nowéj polskiéj miary.

Chcąc przy obliczaniu drugiéj strony wzoru (4), w przypadku trudności podnoszenia do kwadratów, mieć większą pomoc z tablic logarytmowych, wprowadza się kąty posilkowe, tojest: z wiadomych a, b i w, szuka się najprzód kątów $DAB=\lambda$ i $DBA=\mu$ (czyli $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ i $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$) przez równania

$$\text{sty}\,\lambda=\frac{w}{a+b},\quad \text{sty}\,\mu=\frac{w}{a-b};$$

następnie boków AD i BD za pomocą równań

$$AD=\frac{w}{\text{wst}\,\lambda}=\frac{a+b}{\text{dos}\,\lambda},\quad BD=\frac{w}{\text{wst}\,\mu}=\frac{a-b}{\text{dos}\,\mu};$$

a potém powierzchni Z, za pomocą wzoru (2).

Jak wzór (1), tak téż i wzory (2), (3) i (4) służą nietylko dla pasa kulistego o dwóch podstawach, ale obejmują w sobie i przypadek czaszki kulistéj, tudzież przypadek powierzchni kuli całéj. Podobnież, jak wiadomo, ma się rzecz ze wzorem na O. Wzór (3) można nawet brać w znaczeniu jeszcze ogólniejszém, tojest, jako wyrażający różnicę między powierzchniami dwóch czaszek o podstawach niekoniecznie równoległych.

Oczywista zresztą, że aby z linij w, a i b, danych od upodobania na odległość od siebie środków G i H, tudzież na promienie GB i HD podstaw pasa kulistego, znaleźć, przez wykréślenie, środek i promień kuli; dosyć ze środka linii BD wyprowadzić do niéj prostopadłą aż do przecięcia się z linią przechodzącą przez punkta H i G. Chcąc zaś, przez rachunek, znaleźć odległość x, w jakiéj od środka linii HG, na niéj saméj lub jéj przedłużeniu przypada środek kuli; dosyć uważać, że środek

kuli, tudzież środki linij BD i HG, są wiérzchołkami trójkąta podobnego trójkątowi BDI, i że zatém

$$x=\frac{(a+b)(a-b)}{2w},$$

przyjmując dodatność wartości na x za wskazującą kierunek od środka linii HG ku punktowi G: a co do promienia r téjże kuli, samo zestawienie z sobą wzorów (1) i (4) pokazuje, że

$$r=\frac{\sqrt{\{(a+b)^2+w^2\}\{(a-b)^2+w^2\}}}{2w}.$$

W naczyniu np. powyżéj uważaném, środek kuli przypadałby na osi pasa o 9,173 cali wyżéj dna, a promień téjże kuli wynosiłby przeszło 12,677 cali.

Przejście ze wzoru (1) do wzoru (2), a z tego znowu do wzorów (3) i (4), ma Paucker w przytoczonych powyżéj *Fundamente der Geometrie. Mitau,* 1842 *(Stereometrie,* str. 236—237); tylko, że dla skrócenia wykładu, pominął naumyślnie samoż równanie (4), a poprzestał na wskazaniu postępowania, które uważał za dogodniejsze w praktyce, tojest: że aby z wiadomych a, b i w, znaleźć Z, każe zaczynać od wynajdowania kątów posiłkowych μ i λ. Pomimo łatwości zagadnienia, i chociaż się nie rzadko natrafia na przypadki wzorów (2) i (4) odnoszące się do czaszki kulistéj, mało jednak musi być takich dzieł elementarnych, któreby nauczały, jak znaleźć powiérzchnią pasa kulistego, mając dane promienie jego podstaw i wysokość. W książeczce bowiem: *Die Berechnung vom Flächeninhalt der Kugelzone. Ein Beitrag zu jedem Lehrbuch der Stereometrie von Dr. Paul* Escher, *Privatdocenten an der philosophischen Abtheilung des Schweizerischen Polytechnikums in Zürich. Zürich,* 1859, autor jéj, powiedziawszy, że dzieła do nauki stereometryi bynajmniéj wspomnionego zagadnienia nie dotykają, wykłada dwa sposoby algebraiczne, dwa trygonometryczne i nareszcie sposób czysto-geometryczny, któremi toż zagadnienie rozwiązał, podając tamże wzory (2) i (4), a nawet i wskazaną sobie przez p. Dra Fries możność przerobienia wzoru (2) na $Z=4\pi r^2$ wst μ wst λ, za rzeczy nowe. Dodaje téż, że znaczenie wzoru (2), gdybyśmy drugą onego stronę chcieli uważać za wyrażenie powiérzchni ellipsy lub powiérzchni bocznéj walca prostego o podstawie kołowéj, podał był do protokułów 31go zebrania się niemieckich badaczów natury, i że sobie zamówił, aby trzy z jego rozwiązań

były w 32 tomie Grunert'owego *Archiv der Mathematik und Physik* zamieszczone.

Dajmy, że uważany tu pas kulisty przecięty jest płaszczyzną do płaszczyzn jego podstaw równoległą, dzielącą wysokość onego (a zatém i samże pas) na dwie części, z których leżąca przy podstawie z promienia a, do leżącéj przy podstawie z promienia b, ma się jak m do n, rozumiejąc przez m i n dwie linie lub dwie liczby dodatne; i niech c będzie promień tego przecięcia. Opiérając się na własności cięciw przecinających się w kole lub za kołem, przyjdzie się łatwo do równań

$$AD^2=\frac{(m+n)^2c^2-(na-mb)^2}{mn},$$

$$BD^2=\frac{(m+n)^2c^2-(na+mb)^2}{mn},$$

$$w^2=\frac{m+n}{mn}\{(m+n)c^2-na^2-mb^2\},$$

z których zresztą każde prowadzi już do dwóch pozostałych. Dwa piérwsze z tych trzech równań, w połączeniu ze wzorem (2), dają

$$Z=\frac{\pi}{mn}\sqrt{\{(m+n)^2c^2-(na-mb)^2\}\{(m+n)^2c^2-(na+mb)^2\}}; \quad (6)$$

a trzecie pokazuje, że promienie a, b, c i stosunek $m:n$ nie mogą się brać od upodobania, ale muszą dopełniać warunku

$$(m+n)c^2>na^2+mb^2.$$

W szukaniu współrzędnych prostokątnych środka okręgu mającego przechodzić przez trzy punkta, którychby odcięte były

$$\frac{w}{2},\ -\frac{w}{2},\ \frac{n-m}{m+n}\cdot\frac{w}{2},$$

a rzędne odpowiednio

$$a,\quad b,\quad c,$$

równanie powyższe dla w^2 wypadłoby nam jako warunek na to, aby środek okręgu przypadał na osi odciętych.

Jeżeli w szczególności założymy $m=n$, i wartość promienia c, temu założeniu odpowiadającą, czyli promień tak zwanego średniego przecięcia pasa, nazwiemy c_0; będzie, według wzoru (6),

$$Z=\pi\sqrt{\{4c_0^2-(a-b)^2\}\{4c_0^2-(a+b)^2\}},$$

a powyższa nierówność przejdzie na

$$2c_0^2>a^2+b^2.$$

Wyrażenie objętości O przez promienie a, b, c i przez stosunek $m:n$, byłoby, w porównaniu do wzoru (5), wyrażeniem

zawilém. Ale wspomniona dopiéro objętość wyraża się bardzo prosto przez c_0 i w; na mocy bowiem związku

$$a^2+b^2=2c_0^2-\tfrac{1}{2}w^2,$$

wzór (5) sprowadza się do

$$O=\pi w(c_0^2-\tfrac{1}{12}w^2),$$

pokazując: że odcinek kulisty, bądź o jednéj, bądź o dwóch podstawach równoległych, jest równoważny nadmiarowi walca téj saméj wysokości, mającego za podstawę średnie przecięcie odcinka, nad połowę kuli mającéj też wysokość za średnicę.

Wzmiankę o wzorze (6) i jego przypadku, może gdzieindziéj niepodanych, tudzież o niniejszém najprostszém a mało znaném wyrażeniu na O, dopisało się dlatego, aby uczącym się nastręczyć łatwe, a z poprzedzającemi wzorami wiążące się ćwiczenie. W tym samym celu dodamy tu jeszcze, że gdy łuk BFD nie większy od półokręgu, wraz z prostopadłemi BG′ i DH′ spuszczonemi z jego końców na linią prostą P′Q′ względem PQ równoległą, gdziekolwiek w kole lub za kołem na jego płaszczyznie położoną, ale rzeczonego łuku nieprzecinającą, zrobi około téjże linii prostéj P′Q′ obrot całkowity; pole Z' powiérzchni, jaką wtedy nakréśli łuk BFD, tudzież objętość O' bryły, tą powiérzchnią pobocznie, a kołami przez prostopadłe BG′ i DH′ nakréślonemi, jako podstawami ograniczonéj, dają się znaleźć sposobem zupełnie elementarnym.

Niech albowiem d oznacza odległość średnicy PQ od osi P′Q′ obrotu, biorąc d za ilość dodatną lub odjemną, stosownie do tego, czy łuk BFD i oś P′Q′ obrotu leżą ze stron przeciwnych średnicy PQ lub po jednéjże jéj stronie; $2l$ niech oznacza długość łuku BFD, a p niech wyraża pole figury HGBFDH. Uważając powiérzchnią w obrocie całkowitym figury H′G′BFDH′ około osi P′Q′ przez łuk BFD nakréśloną, za granicę powiérzchni nakréślonéj, w tym obrocie, przez linią łamaną, złożoną z cięciw coraz mniejsze części rzeczonego łuku podpiérających, a bryłę nakréśloną przez samęż figurę H′G′BFDH′ za granicę summy walców coraz krótszych, w tęż bryłę wpisanych lub na niéj opisanych, okaże się łatwo, że

$$Z'=\pm(2\pi d.2l+Z), \qquad (7)$$

$$O'=\pi d^2 w+2\pi d.p+O: \qquad (8)$$

gdzie w równaniu piérwszém należy przed nawiasem brać znak +. jeżeli łuk BFD zwrócony jest do osi P′Q′ obrotu, stroną wklęsłą; a znak —, jeżeli przeciwnie, łuk BFD zwrócony jest do osi P′Q′ obrotu, stroną wypukłą.

Gdyby np. łuk DFB zaczynał się w punkcie P, i wynosił $\frac{1}{4}$ swojego okręgu, byłoby $2l=\frac{1}{2}\pi r$, $Z=2\pi r^2$, $w=r$, $p=\frac{1}{4}\pi r^2$. $O=\frac{2}{3}\pi r^3$; a zatém, oznaczając jeszcze bezwzględną wartość odległości d przez d', wiedzielibyśmy, że w tym razie

$$Z'=\pi r(\pi d' \pm 2r),$$
$$O'=\pi r(d'^2 \pm \tfrac{1}{2}\pi r d' + \tfrac{2}{3}r^2);$$

i że z podwójnych znaków + i — nad sobą napisanych, potrzeba brać górne lub dolne, stosownie do tego, czy niniejsza ćwiartka okręgu, powiérzchnią boczną bryły kréśląca, jest do osi P′Q′ obrotu zwrócona stroną swoją wklęsłą lub wypukłą. A jeżeli półokrąg, wraz ze stycznemi wyprowadzonemi z jego końców aż do spotkania się z równoległą do jego średnicy, onegoż nieprzecinającą, obrócimy całkowicie około téj równoległéj, jako około osi; powiérzchnia boczna bryły tak utworzonéj, i samaż bryła, będą miały za miarę podwojone drugie strony równań dopiéro podanych, rozumiejąc przez r promień półokręgu, przez d' bezwzględną odległość środka od osi obrotu, i biorąc, podług tego, czy półokrąg jest do wspomnionéj dopiéro osi zwrócony stroną swoją wklęsłą lub wypukłą, z podwójnych znaków górne lub dolne. Te same równania pokazują jeszcze, że gdy na płaszczyznie przechodzącéj przez linią prostą stałą, ze środka w odległości d' od téj linii prostéj położonego, promieniem r nie większym od d', nakréślimy okrąg koła, a potém płaszczyznę obrócimy całkowicie około rzeczonéj linii prostéj, jako około osi; powiérzchnia *piérścienia* przez koło utworzonego będzie miała za miarę $4\pi^2 rd'$, a objętość tegoż piérścienia będzie równa $2\pi^2 r^2 d'$.

Ogólnie, ponieważ odległość cięciwy BD od środka S, jest czwartą proporcyonalną do w, $\frac{1}{2}(a+b)$ i BD, potrafimy łatwo przewyżkę trapezu GBDH nad trójkąt SBD wyrazić przez a, b i w; a przydając tak znalezioną przewyżkę do wyrażenia na wycinek SBFD, znajdziemy wyrażenie na p. Tym sposobem, podstawiając jeszcze za O drugą stronę równania (5), przekonamy się, że wzór (8) wychodzi na równanie

$$\left.\begin{aligned} O' &= \tfrac{1}{2}\pi w(2d^2+a^2+b^2+\tfrac{1}{3}w^2) \\ &\quad+\frac{\pi d}{2w}(a+b)\{w^2-(a-b)^2\} + 2\pi d r^2 . \text{łuk sty}\frac{w}{a+b}, \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

w którém, zamiast r, należałoby jeszcze położyć jego wartość powyżéj podaną, chcąc miéć O' wyrażoném w samych tylko d, a, b i w. Przez wyrażenie mnożące tu $2\pi d r^2$, rozumié się

w kole z promienia równego jedności, najmniejszy z tych łuków, których styczna trygonometryczna jest równa stosunkowi wysokości w do $a+b$, wyrażony w częściach rzeczonego promienia: jestto, innemi słowy, stosunek połowy łuku kréślącego powiérzchnią boczną bryły, do promienia r tegoż łuku.

Gdy w równaniu (9), zamiast w, napiszemy $2w$, a zakładając potém $a=b=\sqrt{r^2-w^2}$, weźmiemy całego wypadku połowę; będziemy mieli równanie

$$O'=\pi w(d^2+r^2-\tfrac{1}{3}w^2+d\sqrt{r^2-w^2})+\pi d r^2.\text{łuk wst}\frac{w}{r}, \quad (10)$$

odnoszące się do przypadku, kiedy jeden z punktów G, H, pada na środek S. Przez wyrażenie mnożące tu πdr^2, rozumié się podobnież w kole z promienia równego jedności, najmniejszy z tych łuków, których wstawa jest równa stosunkowi wysokości w bryły do r, w częściach rzeczonéj jedności wyrażony: jestto, innemi słowy, stosunek łuku kréślącego powiérzchnią boczną bryły, do promienia r tegoż łuku.

Wskażemy teraz, jakby równanie (9) można stosować do wynajdowania objętości tych części słupa w porządkach architektonicznych, które albo są bryłami takiemi, jakich tu objętość oznaczamy przez O', albo się téż składają z dwóch tego rodzaju brył, powiérzchnie boczne na wspólnym równoleżniku z sobą zgodzone (tojest do siebie styczne) mających. Co się może przydać tém bardziéj, że autor dzieła: *Gründlicher und ausführlicher Unterricht zur praktischen Geometrie von* Johann Tobias Mayer. *Fünfter Theil, zweite, verbesserte Auflage. Göttingen*, 1820, w nauce o wynajdowaniu bryłowatości członków słupa dopiéro wspomnionych (str. 668—677), nie podaje równania (9), ale ogranicza się uwagą tych tylko przypadków, które się zawiérają w równaniu (10). (*)

(*) W niniejszém (a może i w piérwszém z r. 1808) wydaniu téj piątéj części swojego dzieła, mówiąc w § 122, str. 491—497, o przybliżoném dochodzeniu objętości brył obrotowych przez ostrokręgi ścięte, używa Mayer (str. 493) i dowodzi twierdzenia: że ostrokrąg mający za podstawę koło, a ścięty płaszczyzną do niéj równoległą, jest co do objętości równy $\frac{1}{4}$ walca mającego za podstawę koło z promienia równego summie promieni obu podstaw ostrokręgu ściętego, więcéj $\frac{1}{12}$ walca mającego za podstawę koło z promienia równego różnicy promieni podstaw tegoż ostrokręgu ściętego, a którebyto walce miały oba jednaką z ostrokręgiem ściętym wysokość. Nie można więc rzeczonego twierdzenia przypisywać autorom, którzy o niém po roku 1820, i to w znaczną liczbę lat późniéj pisali.

Niech dla skrócenia, promienie podstaw téj bryły, do której się ściąga równanie (9), będą: $G'B=a'$, $H'D=b'$, i niech będzie $\text{dot}\,\lambda=\mathfrak{l}$. Połóżmy nadto,

$$\text{w przypadku } a'>b', \quad \mathfrak{m}=\frac{a'-b'}{w},$$

$$\text{a w przypadku } a'<b', \quad \mathfrak{m}=\frac{b'-a'}{w};$$

tak, iż rozumiejąc przez *wysterk* lub *wypust*, przewyżkę większego z dwóch promieni a' i b' nad mniejszy z nich, $\mathfrak{m}$ będzie wyrażało stosunek wypustu do wysokości: w przypadku $a'=b'$, wypust, a z nim i stosunek $\mathfrak{m}$, przywiedzie się do zera. Samęż wreszcie bryłę, o któréj tu mowa, stosownie do tego, czy łuk BFD kréślący jéj powiérzchnią boczną, zwrócony jest do osi $P'Q'$ obrotu stroną swoją wklęsłą lub wypukłą, nazywajmy, w piérwszym razie, *kręgiem*, a w drugim, *żłobkiem* lub *wklęskiem*; i niech odtąd, dopóki się inaczéj nie powié, O' wyraża tylko objętość kręgu, objętość zaś żłobka oznaczajmy przez O''. Ponieważ $a-b=\pm(a'-b')$, $d=\pm a'-a$, biorąc z podwójnych znaków $+$ i $-$ nad sobą napisanych, górne dla kręgu, a dolne dla żłobka; na mocy przeto związków $a+b=w\,\text{dot}\,\lambda$, $a-b=w\,\text{dot}\,\mu$, będzie

$$a+b=\mathfrak{l}w, \quad \text{dot}\,\mu=\pm\mathfrak{m}, \quad a-b=\pm\mathfrak{m}w, \quad x=\pm\tfrac{1}{2}\mathfrak{l}\mathfrak{m}w,$$

$$r=\tfrac{1}{2}w\sqrt{(1+\mathfrak{l}^2)(1+\mathfrak{m}^2)}, \quad d=\pm a'-\tfrac{1}{2}(\mathfrak{l}\pm\mathfrak{m})w:$$

gdzie z podwójnych znaków $+$ i $-$ przed $\mathfrak{m}$ i dla x, należy, dla kręgu, brać górne lub dolne, stosownie do tego, czy $a'>b'$ lub $a'<b'$; dla żłobka zaś przeciwnie. Co wiedząc, i biorąc jeszcze, jeżeli się podoba, na uwagę tosamość $a^2+b^2=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(a-b)^2\}$, potrafimy drugą stronę równania (9) wyrazić przez a', w, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{l}$ i λ, z którychto ostatnich dwóch ilości jedna którakolwiek wyznacza już drugą z nich. Okaże się tym sposobem, że kładąc, dla skrócenia,

$$\mathfrak{n}=\tfrac{1}{2}(1+\mathfrak{m}^2)\{(1+\mathfrak{l}^2)\lambda-\mathfrak{l}\}, \tag{11}$$

będzie objętość kręgu

$$O'=\pi w\{a'^2+(\mathfrak{n}\mp\mathfrak{m})a'w+\tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{3}+\mathfrak{m}^2-\mathfrak{n}(\mathfrak{l}\pm\mathfrak{m})]w^2\}, \tag{12}$$

a objętość żłobka

$$O''=\pi w\{a'^2-(\mathfrak{n}\pm\mathfrak{m})a'w+\tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{3}+\mathfrak{m}^2-\mathfrak{n}(\mathfrak{l}\mp\mathfrak{m})]w^2\}: \tag{13}$$

gdzie, tak w piérwszém jako i w drugiém równaniu, z podwójnych znaków $+$ i $-$ nad sobą napisanych, potrzeba brać górne, jeżeli a' jest promieniem podstawy większéj; a dolne, jeżeli przeciwnie, a' jest promieniem podstawy mniejszéj. Pamiętajmy

nadto, że w oznacza wysokość bryły; m stosunek wypustu do wysokości, czyli dostyczną mniejszego z kątów G'BD i H'DB, kiedy podstawy są nierówne, i któryto kąt (przechodzący wraz z większym, przy równości podstaw, na prosty) będziemy nadal oznaczali przez (μ); a przez λ=łuk dot l rozumié się połowa długości łuku kréślącego powiérzchnią bryły boczną, biorąc promień r tegoż łuku za jedność.

Gdy np. wypust jest równy wysokości, a łuk kréślący powiérzchnią boczną bryły, ma 90°; wtedy m=1, $\lambda=\frac{1}{4}\pi$, l=1 Jeżeli więc zechcemy jeszcze, żeby a' oznaczało, dla kręgu, promień jego podstawy większéj, a dla żłobka, promień jego podstawy mniejszéj; otrzymamy z równań (12) i (13), na teraźniejszy przypadek, wzory:

$$O'=\pi w\{a'^2-(2-\tfrac{1}{2}\pi)a'w+(\tfrac{5}{3}-\tfrac{1}{2}\pi)w^2\},$$
$$O''=\pi w\{a'^2+(2-\tfrac{1}{2}\pi)a'w+(\tfrac{5}{3}-\tfrac{1}{2}\pi)w^2\},$$

czyli, w przybliżeniu,

$$O'=\pi w(a'^2-0{,}429a'w+0{,}096w^2),$$
$$O''=\pi w(a'^2+0{,}429a'w+0{,}096w^2).$$

Mamy tu zresztą $x=\frac{1}{2}w$, $r=w$; i łatwo sprawdzić, że z podanych dopiéro wzorów dla O' i O'', ściśle zgadzają się ze wzorem dla O' powyżéj na teraźniejszy przypadek podanym.

Dla kręgu i żłobka, utworzonych przez obracanie się półokręgu wraz ze stycznemi, wyprowadzonemi z jego końców i przedłużonemi aż do spotkania się z osią obrotu do tychże stycznych prostopadłą, a półokręgu nieprzecinającą, mielibyśmy $a'=b'$, m=0, $\lambda=\frac{1}{2}\pi$, l=0; a ztąd, według równań (12) i (13), wzory:

$$O'=\pi w(a'^2+\tfrac{1}{4}\pi a'w+\tfrac{1}{6}w^2),$$
$$O''=\pi w(a'^2-\tfrac{1}{4}\pi a'w+\tfrac{1}{6}w^2),$$

zgodne z tém, co się o niniejszych dwóch bryłach powyżéj podało, bo teraz $w=2r$, $a'=d'$.

Gdybyśmy za oś obrotu wzięli linią na płaszczyznie koła, do średnicy PQ, po jéj prawéj stronie, w odległości nie mniejszéj od HD, równolegle poprowadzoną, i obróciwszy całkowicie płaszczyznę około téj osi, chcieli mieć objętość bryły ograniczonéj w części powiérzchnią, jaką w tym obrocie opisał łuk APD, a w części kołami, których okręgi powstały z obiegu końców A i D tegoż łuku: wypadłoby od objętości kręgu, którego powiérzchnią boczną nakréślił w tym obrocie łuk AEP, odjąć objętość żłobka, którego powiérzchnią boczną nakréślił w tymże obrocie łuk PD. Podobnież bryła, ograniczona w części powiérzchnią, jaką teraz opisał łuk QAPD, większy od pół-

okręgu, a w części kołami, których okręgi zostały nakréślone przez końce Q i D tegoż łuku, byłaby przewyżką kręgu, którego powiérzchnią boczną opisał łuk QAP, nad żłobek, którego powiérzchnią boczną opisał łuk PD. A jeślibyśmy za oś obrotu wzięli linią na płaszczyznie koła, równolegle do średnicy PQ, po jéj prawéj stronie, za kołem poprowadzoną; bryła ograniczona w części powiérzchnią, jakąby w całkowitym obrocie rzeczonéj płaszczyzny około teraźniejszéj osi, opisał łuk BQAPD, a w części kołami z okręgów nakréślonych przez punkta B i D, składałaby się z pierścienia nakréślonego przez całe koło, i ze żłobka o powiérzchni bocznéj nakréślonéj przez łuk BFD.

Krąg i żłobek, wystawione z przeciwnych stron na podstawie wspólnéj, a mające powiérzchnie boczne na okręgu téj podstawy wspólnéj do siebie styczne, składają bryłę, która się nazywa *piętką*, gdy podstawa wspólna jest mniejszą z dwóch podstaw kręgu, a większą z dwóch podstaw żłobka; nazywa się zaś *gruszcem*, gdy przeciwnie, podstawa wspólna jest większą z dwóch podstaw kręgu, a mniejszą z dwóch podstaw żłobka. Do opisanéj dopiéro styczności powiérzchni bocznych, rozumiejąc przez a' promień podstawy wspólnéj, potrzeba, żeby kąty μ i λ czyniły tę samę summę w żłobku, co i w kręgu; a zatém, żeby w piętce różnica $(\mu)-\lambda$, a w gruszcu summa $(\mu)+\lambda$, była dla kręgu i żłobka ta sama. Co gdy będzie dopełnioném, obliczenie drugich stron równań (12) i (13), biorąc z podwójnych znaków przed m, dolne w równaniu piérwszém, a górne w drugiém, i zebranie wypadków w summę, doprowadzi nas do objętości piętki; obliczenie zaś drugich stron tychże równań (12) i (13), biorąc z podwójnych znaków przed m przeciwnie, górne w równaniu piérwszém, a dolne w drugiém, i zebranie znowuż wypadków w summę, doprowadzi nas do objętości gruszca.

Pospolicie atoli krąg i żłobek, składające czyto piętkę, czy gruszec, są takie, że (μ) i λ, a tém samém m i l, mają te same wartości w żłobku, co i w kręgu, a nadto jeszcze ten krąg i ten żłobek mają wysokość jednaką. Taka piętka, lub taki gruszec, w przecięciu płaszczyzną poprowadzoną przez oś obrotu, przedstawia, po jednéjże któréjkolwiek stronie téj osi, trapez, którego bok przeciwległy osi zastąpiony został przez dwa łuki kołowe, na połowach tegoż boku jako na cięciwach, z przeciwnych stron onegoż nakréślone, po jednakiéj liczbie stopni mające, a zatém równe; a m (jak w ogóle, kiedy łuki kręgu i żłobka są tylko podobne sobie) jest tu oraz stosunkiem bezwzględnéj różnicy

podstaw trapezu do wysokości tegoż czworokąta, czyli stosunkiem wypustu bryły złożonéj, do jéj wysokości. Jeżeli więc objętość takiéj piętki oznaczymy przez P, a objętość takiego gruszca oznaczymy przez G: będzie, według równań (12) i (13),

$$P=\pi.2w\{a'^2+\tfrac{1}{8}[\tfrac{1}{3}+\mathfrak{m}^2-\mathfrak{n}(\mathfrak{l}-\mathfrak{m})](2w)^2\},$$
$$G=\pi.2w\{a'^2+\tfrac{1}{8}[\tfrac{1}{3}+\mathfrak{m}^2-\mathfrak{n}(\mathfrak{l}+\mathfrak{m})](2w)^2\}:$$

gdzie przez $\mathfrak{n}$ rozumié się zawsze wyrażenie (11). W każdym z dwóch niniejszych wzorów, $2w$ oznacza wysokość bryły, tojest, w piérwszym, piętki, a w drugim, gruszca; a' oznacza promień równoleżnika jednako oddalonego od obu podstaw bryły, równy połowie summy promieni tychże dwóch podstaw; $\mathfrak{m}$ jest stosunkiem wypustu bryły do jéj wysokości; λ oznacza w kole z promienia równego jedności, wyrażony przez tę jedność łuk podobny połowie każdego z dwóch łuków równych, stykających się z sobą na owym równoleżniku, i składających linią esowatą, któréj obrotem około osi słupa, tworzy się powiérzchnia boczna bryły; $\mathfrak{l}$ zaś oznacza dostyczną łuku λ.

Gdy np. piętka, w przecięciu onéj płaszczyzną poprowadzoną przez oś obrotu, przedstawia, po jednéjże któréjkolwiek stronie téj osi, trapez mający różnicę podstaw równą $\frac{2}{3}$ wysokości, a którego bok przeciwległy osi zastąpiony został przez dwa łuki, na połowach tegoż boku jako na cięciwach, z przeciwnych stron onegoż nakréślone, po 60° mające; natenczas $\mathfrak{m}=\frac{2}{3}$, $\lambda=\frac{1}{6}\pi$, $\mathfrak{l}=\sqrt{3}$, a ztąd, w przybliżeniu, objętość piętki

$$P=\pi.2w\{a'^2+0{,}062(2w)^2\}.$$

Jeżeli zaś różnica podstaw rzeczonego trapezu jest połową jego wysokości, a wspomnione łuki, zamiast mieć po 60°, należą do kół, z których jedno ma środek na podstawie większéj, a drugie na przedłużeniu podstawy mniejszéj; będzie wtedy $\mathfrak{m}=\frac{1}{2}$, $\mathfrak{l}=1:\mathfrak{m}=2$ (co prowadzi do promienia $r=\frac{5}{4}w$ na wykréślenie rzeczonych łuków); ztąd, w przyblizeniu, λ $(=26°33'54'')$ $=0{,}4636$, a objętość piętki

$$P=\pi.2w\{a'^2+0{,}0356(2w)^2\}:$$

niezgodnie z przytoczoném powyżéj dziełem Mayer'a, który na str. 676, zamiast 0,0356, czyli krócéj 0,036, pisze 0,042.

Niech znowu np., przecięcie gruszca płaszczyzną przechodzącą przez oś obrotu, będzie, po jednéjże któréjkolwiek stronie téj osi, trapezem mającym różnicę podstaw równą wysokości, a którego bok przeciwległy osi zastąpiony został przez dwa łuki, na połowach tegoż boku jako na cięciwach, z przeciwnych

stron onegoż nakréślone, mające, każdy po 60°, lub każdy po 90°. W piérwszym z tych dwóch przypadków, będzie $\mathfrak{m}=1$, $\lambda=\frac{1}{6}\pi$, $\mathfrak{l}=\sqrt{3}$; a ztąd, objętość gruszca

$$G=\pi.2w\{a'^2+0,0429(2w)^2\},$$

przestając na przybliżeniu. W przypadku zaś drugim, będzie $\mathfrak{m}=1$, $\lambda=\frac{1}{4}\pi$, $\mathfrak{l}=1$; a zatém, w przybliżeniu, objętość gruszca

$$G=\pi.2w\{a'^2+0,024(2w)^2\}:$$

cobyśmy téż otrzymali, dodając do siebie wartości przybliżone dla O' i O'', powyżéj po równaniach (12) i (13) za przykład podane. W niniejszym drugim przypadku, biorąc końce podstaw trapezu nie na osi leżące; spodki prostopadłych, spuszczonych z tych końców na linią dzielącą każdy z dwóch pozostałych boków onegoż na dwie równe części, są środkami, z których, promieniem równym połowie odległości tychże środków od siebie, kréślą się rzeczone dwa łuki po 90° mające.

Jeżeli dwóch żłobków, wystawionych z przeciwnych stron na podstawie wspólnéj z promienia a', powiérzchnie boczne mają być, na okręgu téj wspólnéj podstawy, do siebie styczne; powinna wartość summy $\mu+\lambda$ w jednym z dwóch żłobków, z wartością téjże summy w drugim z nich, spełniać się do dwóch kątów prostych; przyczém należy pamiętać, że jeśli podstawa wspólna jest mniejszą od każdéj z dwóch pozostałych, natenczas, tak w jednym jako i w drugim żłobku, jest dot$\mu=\mathfrak{m}$; w którymby zaś żłobku podstawa wzięta za wspólną, była większą od pozostałéj, w tym dot$\mu=-\mathfrak{m}$. Mając dany promień a' wspólnéj podstawy żłobków, dane ich wysokości, tudzież, w obu żłobkach, dane $\mathfrak{m}$ i λ (lub $\mathfrak{l}$), wskazanemu dopiéro warunkowi styczności zadość czyniące, potrafimy, według wzoru (13), znaleźć objętość każdego z tych dwóch żłobków, a zatém i objętość bryły z nich złożonéj.

Niech bryła z dwóch żłobków w sposób dopiéro opisany złożona, nazywa się *cygą* lub *skocyą* w przypadku, kiedy podstawa zewnętrzna każdego żłobka jest do jego powiérzchni bocznéj styczną. Ponieważ do téj styczności, rozumiejąc przez a' promień podstawy wspólnéj, potrzeba, żeby kąty μ i λ były, w każdym z dwóch żłobków, sobie równe; każdy więc z tych kątów w żłobku jednym, względem każdego z nich w żłobku drugim, powinien być dopełnieniem do kąta prostego, jeżeli rzeczone dwa żłobki mają składać skocyą.

Gdy np., w jednym z dwóch żłobków składających skocyą, wypust jest równy wysokości, a tém samém i łuk kréślący po-

wiérzchnią boczną ma 90°; będzie też i w drugim z tych dwóch żłobków rzecz miała się zupełnie tak samo. Objętość więc téj skocyi, według przykładu podanego po wzorze (13), będzie ściśle równa

$$\pi\{a'^2(w_1+w_2)+(2-\tfrac{1}{2}\pi)a'(w_1^2+w_2^2)+(\tfrac{5}{3}-\tfrac{1}{2}\pi)(w_1^3+w_2^3)\},$$

rozumiejąc przez a' promień podstawy obu żłobkom wspólnéj, a przez w_1 i w_2 wysokości tychże żłobków. Środki, z których się tu kréślą łuki żłobków, leżą na przedłużeniu linii, podług któréj podstawę wspólną przecina płaszczyzna poprowadzona przez oś obrotu; a promienie tych łuków są równe wysokościom w_1 i w_2. Jeżeli, jak pospolicie, jedna z dwóch dopiéro wspomnionych wysokości wynosi $\frac{1}{3}w$, a tém samém druga wynosi $\frac{2}{3}w$, rozumiejąc teraz przez w wysokość skocyi; natenczas wyrażenie poprzedzające na objętość przywodzi się do

$$\pi w\{a'^2+\tfrac{5}{18}(4-\pi)a'w+\tfrac{1}{6}(3\tfrac{1}{3}-\pi)w^2\},$$

a zatém, w przybliżeniu, do

$$\pi w(a'^2+0.238a'w+0,032w^2).$$

Weźmy jeszcze za przykład dwa żłobki: jeden o wysokości w_1, mający $\mathfrak{l}=\mathfrak{m}=\frac{1}{3}$, a drugi o wysokości w_2, mający $\mathfrak{l}=\mathfrak{m}=3$; i niech w każdym z tych dwóch żłobków, a' oznacza promień podstawy mniejszéj. Wzór (13), gdy w nim z podwójnych znaków przed $\mathfrak{m}$ weźmiemy dolne, pokaże nam, że w przybliżeniu, objętość piérwszego z dwóch niniejszych żłobków jest równa

$$\pi(a'^2w_1-0,2525a'w_1^2+0,0269w_1^3),$$

drugiego zaś równa

$$\pi(a'^2w_2+1,9125a'w_2^2+1,4041w_2^3).$$

Przyjmując, że a' ma w obu żłobkach jednę i tę samę wartość, i ustawiwszy te dwa żłobki na sobie tak, aby miały koło z promienia a' za podstawę wspólną i były z jéj stron przeciwnych położone; powstanie ztąd skocya, któréj objętość będzie, w przybliżeniu, równa summie dwóch wyrażeń dopiéro napisanych. Mając zresztą dane, w piérwszym żłobku, w_1 i $\mathfrak{m}=\frac{1}{3}$, a w drugim, w_2 i $\mathfrak{m}=3$, i wiedząc nadto, że podług powyższego wyrażenia ogólnego na r, łuk żłobka piérwszego ma za promień $\frac{5}{9}w_1$, a łuk żłobka drugiego ma za promień $5w_2$; potrafimy wykonać i sprawdzić wykréślenie łuków stycznych, składających linią krzywą, któréj obrotem około osi słupa tworzy się powiérzchnia boczna teraźniejszéj skocyi.

Miejmy téj skocyi daną wysokość w, i załóżmy w szczególności, że promień r_1 łuku w żłobku piérwszym, ma się mieć

do promienia r_2 łuku w żłobku drugim, jak 3 do 8. Okaże się, że w tym razie powinno być

$$w_1 = \tfrac{27}{35}w, \quad w_2 = \tfrac{8}{35}w; \quad r_1 = \tfrac{3}{7}w, \quad r_2 = \tfrac{8}{7}w.$$

Podstawiając w podanych ostatnio wyrażeniach na objętość żłobków, za w_1 i w_2 wartości dopiéro napisane i zbierając wypadki w summę, przekonamy się, że w tym przypadku, objętość skocyi ma za wyrażenie przybliżone

$$\pi w(a'^2 - 0{,}0503a'w + 0{,}0291w^2).$$

Jak zresztą samęż niniejszą skocyą wykréślić, pokazuje to figura na tablicy piérwszéj w dziele Marconi'ego: *O porządkach architektonicznych. Poszyt I. W Warszawie*, 1828.

Wystawmy sobie teraz, że na płaszczyznie dwóch linij równoległych PQ i P′Q′, dowolnie poprowadzonych, BFD, zamiast być łukiem koła, jest linią krzywą, według upodobania od punktu B aż do punktu D poprowadzoną, byleby jéj żadna z linij prostych PQ i P′Q′ między końcami B i D nie przecinała, i byleby taż linia krzywa BFD była taką, aby każda z prostopadłych do PQ, począwszy od GB aż do HD włącznie, spotykała ją w jednym tylko punkcie. Niech $2l$ oznacza długość rzeczonéj linii krzywéj BFD; p niech oznacza pole odcinka HGBFDH; w wysokość HG; a d niech oznacza odległość linii PQ od P′Q′, uważając d za ilość dodatną, gdy linia P′Q′ i krzywa BFD leżą z przeciwnych stron linii PQ, a za ilość odjemną, gdy linia P′Q′ i krzywa BFD leżą po jednéjże stronie linii PQ. Obróćmy płaszczyznę równoległych PQ i P′Q′ całkowicie około linii PQ jako około osi; i niech Z oznacza pole powiérzchni, jaką w tym obrocie opisała linia krzywa BFD, a O niech oznacza objętość bryły, tą powiérzchnią pobocznie i kołami z okręgów przez punkta B i D teraz nakréślonych, jako podstawami ograniczonéj. Tęż samę płaszczyznę obróćmy znowuż całkowicie około osi P′Q′; i niech Z' oznacza pole powiérzchni, jaką teraz opisała ta sama linia krzywa BFD, a O' niech oznacza objętość bryły, tą powiérzchnią pobocznie i kołami z okręgów przez punkta B i D teraz nakréślonych, jako podstawami ograniczonéj. Rozważywszy sposób, którym się dowodzi związków (7) i (8), kiedy BFD jest łukiem koła, przekonamy się, że wspomnione dopiéro związki (7) i (8) ostoją się jeszcze i przy teraźniejszém znaczeniu ogólniejszém liter d, l, Z, Z', p, O i O', do nich wchodzących; bylebyśmy w związku (7) brali przed nawiasem znak +, gdy krzywa BFD przypada po jednéjże stronie obu linij PQ i P′Q′, a znak —, gdy taż krzywa BFD przypada

między liniami PQ i P′Q′. Zostawiając własnemu domysłowi czytelnika, jakby związki (7) i (8) można podnieść do jeszcze większéj ogólności, zakończymy rzecz wzorami na objętość kręgów i żłobków elliptycznych.

Dajmy, że BFD jest częścią półobwodu ellipsy, mającéj za jednę oś, linią PQ=$2r$, a za drugą oś, linią $2s$, od PQ krótszą lub dłuższą; i połóżmy $q=s:r$. W takiém przypuszczeniu, okrąg koła, ze środka S rzeczonéj ellipsy, promieniem SP=SQ=r nakréślony, będzie okręgiem na téjże ellipsie opisanym lub w nię wpisanym; i przez którykolwiek punkt na osi PQ poprowadzimy do niéj prostopadłą, powstająca ztąd cięciwa ellipsy, do powstającéj ztąd cięciwy koła, będzie się miała zawsze, jak q do 1. Z czego wypada, że i odcinek elliptyczny HGBFDH, czyli teraźniejsze p, do odpowiedniego mu odcinka kołowego, tojest do powiérzchni, linią HG, prostopadłemi GB i HD, jeśli tego potrzeba, przedłużonemi, tudzież łukiem rzeczonego koła ograniczonéj, ma się także, jak q do 1; a z dwóch brył utworzonych przez całkowite obrócenie się wspomnionych dopiéro dwóch odcinków około osi PQ, piérwsza, czyli odcinek ellipsoidalny O, ma się do drugiéj, czyli do odpowiedniego odcinka kuli, jak q^2 do 1. Jeżeli więc teraz będziemy przez O' rozumieli objętość bryły ograniczonéj powiérzchniami, w obrocie całkowitym około osi P′Q′, przez łuk elliptyczny BFD i prostopadłe BG′ i DH′ zakréślonemi, i jeśli nadto przez a=GB i b=HD będziemy teraz rozumieli rzędne końców wspomnionego dopiéro łuku elliptycznego BFD, do osi PQ odciętych prostopadłe; przystosowanie związku (8) uogólnionego, tudzież zapatrzenie się na wzór (9), w którym rzędne a i b końców łuku kołowego mają się do teraźniejszych a i b, jak 1 do q, doprowadzi nas do równania

$$O'=\tfrac{1}{2}\pi w(2d^2+a^2+b^2+\tfrac{1}{3}q^2w^2)$$
$$+\frac{\pi d(a+b)}{2q^2w}\{q^2w^2-(a-b)^2\}+2\pi dqr^2.\text{łuk sty}\frac{qw}{a+b}:$$

gdzie, zamiast r^2, należałoby jeszcze położyć

$$\frac{\{(a+b)^2+q^2w^2\}\{(a-b)^2+q^2w^2\}}{4q^4w^2},$$

chcąc mieć O' wyrażoném w samych tylko a, b, q, w i d. Bryła, któréj tu O' oznacza objętość, jest kręgiem elliptycznym, jeżeli łuk elliptyczny BFD, nie większy od półobwodu ellipsy, jest do osi P′Q′ zwrócony swoją stroną wklęsłą; jest zaś żłobkiem elliptycznym, jeżeli przeciwnie, łuk BFD jest do osi P′Q′ zwrócony swoją stroną wypukłą.

Gdy w podaném dopiéro wyrażeniu na O', zamiast w, napiszemy $2w$, a założywszy potém $a=b=q\sqrt{r^2-w^2}$, weźmiemy całego wypadku połowę; będziemy mieli wzór

$$O'=\pi w\left(d^2+s^2-\frac{s^2w^2}{3r^2}+\frac{ds}{r}\sqrt{r^2-w^2}\right)+\pi drs.\text{łuk wst}\frac{w}{r},$$

odnoszący się do przypadku, kiedy punkt G lub H pada na środek S ellipsy.

Jeżeli w niniejszych dwóch wyrażeniach na O', założymy $q=1$ czyli $s=r$; wrócimy do wzorów (9) i (10) na objętość kręgów i żłobków, któreby właściwie należało nazywać kręgami i żłobkami kołowemi.

Rzecz o związkach (7), (8) i o przystosowaniu drugiego z nich, pisałem w listopadzie, poprzednie zaś w sierpniu 1859 r.

A. F.

Frąckiewicz